ANALISI ARMONICA O DI FOURIER: UNO SGUARDO ALL'INTERNO DEI DATI

Una volta imparato come calcolare i coefficienti di una regressione lineare condotta sui dati con una combinazione polinomiale di funzioni sinusoidali, veniamo a precisare il processo chiamato Analisi Armonica o di Fourier. In generale, come già analizzato, una funzione periodica sinusoidale può essere rappresentata come $f(t)=A \sin[2\pi f t + \varphi]$, dove A=Ampiezza dell'oscillazione; f=frequenza e φ = fase. Con la regola del 'seno di una somma' ottengo $f(t) = A \operatorname{Sin}[2\pi f t] \operatorname{Cos}[\varphi] + A \operatorname{Cos}[2\pi f t] \operatorname{Sin}[\varphi]$; poichè A e φ non dipendono dal tempo, pongo $a = A \operatorname{Sin}[\varphi]$ e $b = A \operatorname{Cos}[\varphi]$, ottenendo per ogni funzione del seno: $\mathbf{a \operatorname{Cos}[2\pi f t] + b \operatorname{Sin}[2\pi f t]}$. In a e b saranno contenute l'ampiezza e la fase di partenza che possono essere ricavate:

$a^2 = A^2 \operatorname{Sin}^2[\varphi]$; $b^2 = A^2 \operatorname{Cos}^2[\varphi]$; sommando membro a membro:
$a^2+b^2 =A^2$ e quindi $\mathbf{A = \sqrt{(a^2 + b^2)}}$
$a/b = \operatorname{Sin}[\varphi] / \operatorname{Cos}[\varphi] = \operatorname{Tan}[\varphi]$; da qui: $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{ArcTan[a/b]}$

Per quanto riguarda una serie discreta Y_t di n dati (n dispari) presi ad uguali intervalli di tempo (Serie Storica), che considero periodica di periodo T=n, si può esprimere come una costante più una combinazione lineare di funzioni sinusoidali, dette 'armoniche', il cui numero massimo è kmax = (n-1)/2 se n dispari (11), con ampiezze e fasi che variano e frequenze che aumentano rispetto ad una fondamentale minima uguale a 1/T o 1/n (1/n, 2/n, 3/n... kmax/n), dette *frequenze di Fourier* (Makridakis, pag.399, opera citata nel successivo paragrafo):
$\mathbf{f(t) = a_0/2 + \Sigma_k A_k \operatorname{Sin}[(k/n\ t)\ 2\pi + \varphi_k]}$; questa espressione, come sopra, può essere posta in una forma dove non figurano esplicitamente A e φ:
$\mathbf{f(t) = a_0/2 + \Sigma_k (a_k \operatorname{Cos}[(k/n\ t)\ 2\pi] + b_k \operatorname{Sin}[(k/n\ t)\ 2\pi]}$ per t = 1, 2, ... n e k= 1, 2, ...kmax, dove k rappresenta il numero dell'armonica ovvero il numero dei cicli in n dati e k/n è la frequenza per ogni armonica (per k=1, 1/n è la frequenza minima e kmax/n è la massima). In ogni istante di lettura dati, agisce una combinazione lineare di kmax coppie seno-coseno (armoniche), più una costante. Ognuna di queste coppie con la propria frequenza di Fourier k/n, producendo un numero intero k di oscillazioni complete in n, contribuisce a "costruire" il dato sperimentale a quell'istante (12), per cui avrò da calcolare un numero di coefficienti pari a kmax*2 + 1; cioè n, se n dispari. Una volta calcolati a_k, b_k e a_0, essi permettono di individuare f(t), cioè i valori teorici rispetto ai dati sperimentali Y_t. Nel nostro caso f(t) e Y_t coincideranno, come accade in una regressione polinomiale in cui il numero dati =numero dei coefficienti calcolati, mantenendo le stesse informazioni originali. La f(t) è la funzione polinomiale trigonometrica da 'fittare' ai dati Y_t. Come abbiamo visto, per il metodo dei minimi quadrati i coefficienti si ricavano imponendo che la sommatoria su n delle differenze $(Y_t - f(t))^2$ sia un minimo. Eseguito il calcolo secondo i suggerimenti precedenti, si ottengono per i coefficienti a_k e b_k le relazioni seguenti, già ricavate dagli esempi eseguiti in casi semplici [1]:

$\mathbf{a_k = 2/n\ \Sigma_t (Yt \operatorname{Cos}[(k\ t/n)\ 2\pi])}$ k va da 0 a kmax; se zero, si ottiene il coeff. costante a_0 a frequenza zero, uguale a 2*media dei dati; il numero dei coeff. per a_k sarà: kmax+1
$\mathbf{b_k = 2/n\ \Sigma_t (Yt \operatorname{Sin}[(k\ t/n)\ 2\pi])}$ k va da 1 a kmax; il numero dei coeff. per b_k sarà: kmax; totale coeff. = n.

Per le relazioni iniziali relative ad ampiezza e fase, valide per ogni armonica, abbiamo:

$\mathbf{A_k = \sqrt{(a_k^2 + b_k^2)}}$
$\boldsymbol{\varphi_k} = \mathbf{ArcTan[a_k / b_k]}$