

$yg=ListPlot[y,PlotJoined->True, GridLines->\{Automatic,Automatic\}]$, dove ad y si sostituisce in successione $yt, yt1, yt2$

Se infine $n=64, A=2, k=1$ e $\varphi=45^\circ$:

$yt3=N[Table[2 Sin[1 t 2 Pi/64+Pi/4],\{t,0,64\}]]$

$yg=ListPlot[yt3,PlotJoined->True, GridLines->\{Automatic,Automatic\}]$

Naturalmente ognuno può inventare gli esempi che vuole ed esercitarsi a piacere.

Come 'fittare' funzioni del seno ai dati - Come esempio illustrativo, si voglia 'fittare' ai dati Y_t una sola onda del seno della forma $Y_t'=A \sin[(k/n t) 2\pi + \varphi]$ che, tramite la regola del seno di una somma si trasforma in $Y_t'=a_1 \cos[(k/n t) 2\pi] + b_1 \sin[(k/n t) 2\pi]$, posto $k=1, n=10, t=1 \dots 10$ e $Y_t = 103.585, 99.768, 97.968, 99.725, 101.379, 99.595, 96.376, 96.469, 100.693, 104.443$.

Poniamo la sinusoidale nella forma dell'equazione di una regressione ordinaria, aggiungendo il termine costante: $Y_t' = a_0 + a_1 X_{2t} + b_1 X_{3t}$ e $Y_t = a_0 + a_1 X_{2t} + b_1 X_{3t} + \varepsilon_t$ dove, per ogni $t, X_{2t} = \cos[(1/10 t) 2\pi]$ e $X_{3t} = \sin[(1/10 t) 2\pi]$ rappresentano solo dei numeri ottenuti sostituendo a t successivamente 1, 2 ... 10, corrispondenti a $Y_1, Y_2 \dots Y_{10}$: $Y_1 = a_0 + a_1 X_{21} + b_1 X_{31} + \varepsilon_1$; $Y_2 = a_0 + a_1 X_{22} + b_1 X_{32} + \varepsilon_2$; $Y_{10} = \dots$

Se vogliamo ricavare i tre coefficienti a_0, a_1 e b_1 con il metodo dei minimi quadrati come nelle regressioni lineari, minimizziamo la sommatoria delle differenze $Y_t - Y_t'$ al quadrato:

$\sum_t (Y_t - a_0 - a_1 X_{2t} - b_1 X_{3t})^2 = \sum \varepsilon_t^2 = \text{minimo}$; che è un modo sintetico di scrivere $(103.585 - a_0 - a_1 \cos[1/10 2\pi] - b_1 \sin[1/10 2\pi] + 99.768 - a_0 - a_1 \cos[2/10 2\pi] - b_1 \sin[2/10 2\pi] + \dots 104.443 - a_0 - a_1 \cos[10/10 2\pi] - b_1 \sin[10/10 2\pi])^2 = \text{minimo}$, basta derivare parzialmente rispetto alle incognite a_0, a_1 e b_1 l'argomento della sommatoria ottenendo tre equazioni nelle tre incognite a_0, a_1 e b_1 che verranno poi uguagliate a zero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sum \varepsilon_t^2}{\partial a_0} &= 2 \sum_t (Y_t - a_0 - a_1 X_{2t} - b_1 X_{3t}) (-1) \\ \frac{\partial \sum \varepsilon_t^2}{\partial a_1} &= 2 \sum_t (Y_t - a_0 - a_1 X_{2t} - b_1 X_{3t}) (-X_{2t}) \\ \frac{\partial \sum \varepsilon_t^2}{\partial b_1} &= 2 \sum_t (Y_t - a_0 - a_1 X_{2t} - b_1 X_{3t}) (-X_{3t}) \end{aligned}$$

Moltiplicando e uguagliando a zero otteniamo :

$$\begin{aligned} 2 \sum_t (-Y_t + a_0 + a_1 X_{2t} + b_1 X_{3t}) &= 0 \\ 2 \sum_t (-Y_t X_{2t} + a_0 X_{2t} + a_1 X_{2t}^2 + b_1 X_{2t} X_{3t}) &= 0 \\ 2 \sum_t (-Y_t X_{3t} + a_0 X_{3t} + a_1 X_{2t} X_{3t} + b_1 X_{3t}^2) &= 0 \end{aligned}$$

Dividendo i due membri per 2 e applicando alcune semplici regole delle sommatorie si ottiene:

$$\begin{array}{rcccccc} -\sum Y_t & + a_0 n & + a_1 \sum X_{2t} & + b_1 \sum X_{3t} & = & 0 \\ -\sum Y_t X_{2t} & + a_0 \sum X_{2t} & + a_1 \sum X_{2t}^2 & + b_1 \sum X_{2t} X_{3t} & = & 0 \\ -\sum Y_t X_{3t} & + a_0 \sum X_{3t} & + a_1 \sum X_{2t} X_{3t} & + b_1 \sum X_{3t}^2 & = & 0 \end{array}$$

dove a_0, a_1 e b_1 sono le incognite, mentre tutte le sommatorie sono semplicemente numeri. Queste equazioni potevano essere ricavate immediatamente con la regola nella nota (10). Il calcolo delle sommatorie sembrerebbe piuttosto laborioso pur essendo la numerosità del campione bassa (10 dati) e pur avendo 'fittato' ai dati solo un'onda del seno: si pensi che per la maggior parte delle sommatorie eseguono una somma di 10 termini ognuno composto da un prodotto del quale almeno un fattore è una funzione trigonometrica (es., $\sum Y_t X_{2t} = Y_1 * \cos[1/10 2\pi] + Y_2 * \cos[2/10 2\pi] + \dots Y_{10} * \cos[10/10 2\pi]$). In effetti trattandosi di sommatorie su t da 1 a n corrispondenti nel continuo a integrali fra 0 e periodo, è facile dimostrare (9) che $\sum X_{2t}^2 = \sum X_{3t}^2 = \sum \cos^2[t/10 2\pi] = \sum \sin^2[t/10 2\pi] = n/2$, $\sum X_{2t} X_{3t} = \sum (\cos[t/10 2\pi] * \sin[t/10 2\pi]) = 0$, ; $\sum X_{2t} = \sum X_{3t} = 0$ ed altro. Ciò si può anche